

去除乘性噪声的小波变分模型

李亚峰^{1,2}, 冯象初¹

(1. 西安电子科技大学应用数学系, 陕西西安 710071; 2. 宝鸡文理学院计算机科学系, 陕西宝鸡 721016)

摘要: 基于一个凸的全变差变分能量泛函, 本文提出一个去除乘性噪声的小波变分模型. 使用凸优化工具, 给出该模型的交替分裂 Bregman 算法. 相比于目前基于全变差去除乘性噪声的变分模型和分裂算法, 新模型和算法形式简单, 推广性强. 一系列实验结果验证了本文算法及推广算法的有效性.

关键词: 乘性噪声; Besov 空间; 小波; 曲线波; 变分模型

中图分类号: TP391 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2012) 03-0477-06

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2012.03.011

Wavelet Based Variational Model to Remove Multiplicative Noise

LI Ya-feng^{1,2}, FENG Xiang-chu¹

(1. Department of Applied Mathematics, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 721016, China;

2. Department of Computer Science, Baoji University of Arts and Science, Baoji, Shaanxi 721016, China)

Abstract: Based on a convex total variation (TV) variational energy function, this paper proposes a wavelet based variational model to remove multiplicative noise. Using convex optimization tool, we give an alternating split Bregman algorithm to solve the proposed model. Compared with existing TV based method, the proposed algorithm is simple and can be extended easily. Numerical experiments are presented to demonstrate the efficient performance of the proposed algorithm and its extensions.

Key words: multiplicative noise; besov space; wavelet; curvelet; variational model

1 引言

变分法和小波是数字图像处理的有力工具. 使用变分技术和小波方法, 去除加性高斯噪声的研究已较为成熟^[1,2]. 经典的 ROF^[1]模型用全变差(TV)作为正则项, 使用 L_2 范数作为保真项(数据项), 解一个凸优化问题

$$\min_{f \in \text{BV}(\Omega)} (|f|_{\text{TV}} + \lambda \|f - f_0\|^2) \quad (1)$$

这里 $f_0: \Omega \rightarrow R^+$ 为原始图像, $|f|_{\text{TV}} = \int_{\Omega} |\nabla f(x)| dx$ 为 f 在有界变差(BV)空间的半范数, 参数 λ 须匹配于噪声水平. 众所周知, Besov 空间 $B^1_{1,1}$ 是 BV 空间的子空间. 用 $B^1_{1,1}$ 代替 BV, 记 $\{f_{\gamma}\}_{\gamma \in \Gamma}$ 和 $\{f_{0\gamma}\}_{\gamma \in \Gamma}$ 分别为 f 和 f_0 的小波分解系数, 则函数与相应的小波分解系数一一对应. 利用 Parseval 等式, 由式(1)得

$$\min_f (|f|_{B^1_{1,1}} + \lambda \sum_{\gamma \in \Gamma} \|f_{\gamma} - f_{0\gamma}\|^2) \quad (2)$$

其中 $|f|_{B^1_{1,1}}$ 表示 f 在 Besov 空间 $B^1_{1,1}$ 的半范数, Γ 表示小波系数指标集. 进一步使用 Besov 空间 $B^1_{1,1}$ 与小波系数

的 l_1 范数等价模关系^[3~5]:

$$|f|_{B^1_{1,1}} \approx \sum_{\gamma \in \Gamma} |f_{\gamma}| \quad (3)$$

式(2)写为

$$\min_f \sum_{\gamma \in \Gamma} |f_{\gamma}| + \lambda \sum_{\gamma \in \Gamma} \|f_{\gamma} - f_{0\gamma}\|^2 \quad (4)$$

Chambolle^[4]发现式(4)的解是小波系数软阈值, 随后有大量的推广性研究^[5~7].

本文将上述思想应用到去除乘性噪声问题. 在合成孔径雷达图像(SAR)、超声图像和激光图像中都存在乘性噪声^[8]. 相比于加性噪声, 乘性噪声的去除更为复杂. 在连续情形下, 对任意 $x \in \Omega$, 乘性噪声模型为

$$f_0(x) = f(x) \cdot v(x) \quad (5)$$

这里 f_0 为观测图像, f 为未污染图像, v 是均值为 1、服从 Gamma 分布的噪声, 其概率密度函数为

$$\text{pdf}(v) = \frac{L^L}{\gamma(L)} v^{L-1} e^{-Lv} \cdot 1 (> 0) \quad (6)$$

其中 L 为同场景独立成像次数, $\gamma(\cdot)$ 是 Gamma 函数.

在文献[9]中, Rudin、Lions 和 Osher 提出了基于全变

差去除高斯乘性噪声的变分模型(RLO模型). 针对去除 Gamma 分布乘性噪声, Aubert 和 Aujol^[10] 基于最大后验提出了一个非凸全变差变分模型(AA模型)

$$\min_{f \in \text{BV}(\Omega)} \left(|f|_{\text{TV}} + \lambda \int_{\Omega} (\log f + \frac{f_0}{f}) dx \right) \quad (7)$$

随后, Shi 和 Osher^[11], Huang 和 Michael^[12] 分别对式(7)进行了改进, 得到了较好的去噪结果. 文献[13]给出一个在变换域上加权 L_1 保真, 在空域 TV 正则的变分模型, 使用 Douglas-Rachford 分裂算法求解, 得到了一个复杂的杂交算法和很好的去噪效果. 文献[14]使用对数变换将乘性噪声转化为加性噪声, 在图像的对数域, 基于 TV 和变量分裂技术给出了交替分裂迭代算法, 得到了 TV 类方法的最好结果.

2 去除乘性噪声的小波变分模型与算法

由于 AA 模型的非凸性, 因此本文考虑另一个基于 Weberized TV 正则^[15]的变分模型

$$\min_f \left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla f|}{f} dx + \lambda \int_{\Omega} (\log f + \frac{f_0}{f}) dx \right) \quad (8)$$

尽管式(8)模型仍然是非凸的, 但其 Euler-Lagrange 方程与下面凸的变分模型的 Euler-Lagrange 方程一致,

$$\min_{f \in \text{BV}(\Omega)} \left(\int_{\Omega} |\nabla f| dx + \lambda \int_{\Omega} (f - f_0 \log f) dx \right) \quad (9)$$

式(9)模型可视为 AA 模型的凸松弛.

在式(9)模型中, 用 $B_{1,1}^+$ 代替 BV, 式(9)可以写为

$$\min_{f \in B_{1,1}^+(\Omega)} \left(|f|_{B_{1,1}^+} + \lambda \int_{\Omega} (f - f_0 \log f) dx \right) \quad (10)$$

使用小波系数的 l_1 范数与 Besov 空间 $B_{1,1}^+$ 半范的等价模关系(式(3)), 得到下面的小波变分模型

$$\min_f \left(\sum_{\gamma \in \Gamma} |f_{\gamma}| + \lambda \int_{\Omega} (f - f_0 \log f) dx \right) \quad (11)$$

式(11)是在变换域上正则, 在空域上保真的变分模型. 为了给出有效的算法, 引入一个新的变量 g , 式(11)问题等价于约束优化问题

$$\min_g \left(\sum_{\gamma \in \Gamma} |g_{\gamma}| + \lambda \int_{\Omega} (f - f_0 \log f) dx \right), \text{ s.t. } g = f \quad (12)$$

这里 g_{γ} 表示 g 的小波分解系数. 利用罚函数方法化为无约束问题得

$$\min_g \left(\sum_{\gamma \in \Gamma} |g_{\gamma}| + \lambda \int_{\Omega} (f - f_0 \log f) dx + \frac{\mu}{2} \|g - f\|^2 \right)$$

这为了满足约束条件, μ 必须取很大, 但这会产生计算稳定性问题. 定义泛函

$$J(f, g) = \sum_{\gamma \in \Gamma} |g_{\gamma}| + \lambda \int_{\Omega} (f - f_0 \log f) dx$$

和 $J(f, g)$ 的 Bregman 距离^[16]

$$D_J^{(k)}(f, g, f^{(k)}, g^{(k)}) = J(f, g) - J(f^{(k)}, g^{(k)})$$

$$- \langle P_f^{(k)}, f - f^{(k)} \rangle - \langle P_g^{(k)}, g - g^{(k)} \rangle$$

这里 $P_f^{(k)}$ 和 $P_g^{(k)}$ 是 $J(f, g)$ 分别关于 f 和 g 在点 $f^{(k)}$ 和 $g^{(k)}$ 的次梯度. 考虑变分序列的优化问题

$$\{f^{(k+1)}, g^{(k+1)}\} = \underset{f, g}{\operatorname{argmin}} D_J^{(k)}(f, g, f^{(k)}, g^{(k)}) + \frac{\mu}{2} \|g - f\|^2,$$

初始点 $f^{(0)} = g^{(0)} = b^{(0)} = 0$. 如果记 $h_f^{(k)} = \frac{P_f^{(k)}}{\lambda}$, $h_g^{(k)} = \frac{P_g^{(k)}}{\lambda}$ 和 $h_f^{(0)} = h_g^{(0)} = 0$, 经过化简并舍掉常数项, 上式可以写为

$$\begin{cases} \{f^{(k+1)}, g^{(k+1)}\} \\ = \underset{f, g}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{\gamma \in \Gamma} |g_{\gamma}| + \lambda \int_{\Omega} (f - f_0 \log f) dx \right. \\ \left. + \frac{\mu}{2} \|f - g - b^{(k)}\|^2 \right\} \\ b^{(k+1)} = b^{(k)} - (f^{(k+1)} - g^{(k+1)}) \end{cases} \quad (13)$$

利用文献[16]的技巧可以证明, 对给定的 μ , 式(13)迭代问题的解收敛到约束优化问题式(12)的解. 式(13)为多变量优化问题, 采用交替优化 f 和 g , 可以分解为两个子问题

$$f^{(k+1)} = \min_f \left\{ \lambda \int_{\Omega} (f - f_0 \log f) dx \right. \\ \left. + \frac{\mu}{2} \|f - (g^{(k)} + b^{(k)})\|^2 \right\} \quad (14)$$

和

$$g^{(k+1)} = \underset{g}{\operatorname{argmin}} \sum_{\gamma \in \Gamma} |g_{\gamma}| + \frac{\mu}{2} \|g - (f^{(k+1)} - b^{(k)})\|^2 \quad (15)$$

容易看到子问题式(14)的解为

$$f^{(k+1)} = (g^{(k)} + b^{(k)} - \tau + \sqrt{(g^{(k)} + b^{(k)} - \tau)^2 + 4\tau f_0}) / 2 \quad (16)$$

这里 $\tau = \lambda/\mu$. 利用 Parseval 等式, 子问题式(15)可以写为

$$g_{\gamma}^{(k+1)} = \underset{g_{\gamma}}{\operatorname{argmin}} \sum_{\gamma \in \Gamma} |g_{\gamma}| + \frac{\mu}{2} \sum_{\gamma \in \Gamma} \|g_{\gamma} - (f^{(k+1)} - b^{(k)})_{\gamma}\|^2 \quad (17)$$

带有下标 γ 的符号, 均表示函数的小波分解系数. 由于泛函可以解耦为

$$g_{\gamma}^{(k+1)} = \underset{g_{\gamma}}{\operatorname{argmin}} |g_{\gamma}| + \frac{\mu}{2} \|g_{\gamma} - (f^{(k+1)} - b^{(k)})_{\gamma}\|^2,$$

$$\forall \gamma \in \Gamma$$

记软阈值算子为 $T_{1/\mu}$, 即

$$T_{1/\mu}(\beta) = \operatorname{sign}(\beta) (|\beta| - 1/\mu)_+$$

因此对所有指标 γ , 上式的解为

$$g_{\gamma}^{(k+1)} = T_{1/\mu}((f^{(k+1)} - b^{(k)})_{\gamma}) \quad (18)$$

交替求解子问题式(14)、(15)称为交替分裂 Bregman 算法^[16].

算法 1 (去除乘性噪声小波基变分模型式(11)的交替分裂 Bregman 算法)

输入:带有乘性噪声图像 f_0 , 参数 $\lambda, \mu, \tau = \lambda/\mu$, 小波函数 $\{\psi_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$

初始化 $g^{(0)} = 0, b^{(0)} = 0$

迭代直到收敛

$$(1) f^{(k+1)} = (g^{(k)} + b^{(k)} - \tau + \sqrt{(g^{(k)} + b^{(k)} - \tau)^2 + 4\tau f_0}) / 2$$

$$(2) \text{使用小波变换得到小波系数 } (f^{(k+1)} - b^{(k)})_\gamma \text{ 并计算 } g_\gamma^{(k+1)} = T_{1/\mu}((f^{(k+1)} - b^{(k)})_\gamma), \text{使用逆小波变换得到 } g^{(k+1)}$$

$$(3) b^{(k+1)} = b^{(k)} - (f^{(k+1)} - g^{(k+1)})$$

输出: f

该算法可以看作作为 Douglas-Rachford-Splitting^[17]算法的一种特例,我们在文献[18]中给出了去除加性噪声模型的收敛性证明,算法 1 的收敛性证明与文献[18]一致.从算法的细节描述上来看,算法本质上是一种特殊的小波迭代阈值算法.该算法简单、收敛速度快.对比于文献[14]中的算法,本文算法避免了图像作对数变换引起的偏差,并且本文算法是基于调和分中多尺度几何变换的算法,利用了更多图像的几何结构信息,这是本文算法更优于文献[14]算法的关键.第 3 节给出推广的小波变分模型和算法,第 4 节将给出实验结果并和文献[14]进行比较.

3 模型与算法的推广

众所周知, Besov 空间 $B_{p,q}^\alpha$ ($\alpha > 0, 0 < p, q \leq +\infty$) 可以刻画图像的光滑性.本节在更一般的空间 $B_{1,1}^\alpha$ 中讨论式(10)模型.

在式(10)模型中,用 $B_{1,1}^\alpha$ 替代 $B_{1,1}^1$, 有下面推广的模型

$$\min_{f \in B_{1,1}^\alpha(\Omega)} \left(|f|_{B_{1,1}^\alpha} + \lambda \int_{\Omega} (f - f_0 \log f) dx \right) \quad (19)$$

小波系数与 Besov 空间 $B_{1,1}^\alpha$ 半范的等价模关系为^[3-5]

$$|f|_{B_{1,1}^\alpha} \approx \sum_{\gamma \in \Gamma} 2^{j(\alpha-1)} |f_\gamma| \quad (20)$$

由式(19)和(20),得到更一般的小波基变分模型为

$$\min_f \left(\sum_{\gamma \in \Gamma} 2^{j(\alpha-1)} |f_\gamma| + \lambda \int_{\Omega} (f - f_0 \log f) dx \right) \quad (21)$$

可以清楚的看到,当 $\alpha = 1$ 时,式(21)与式(11)一致.由式(12)~(17)的分析,在更一般的 Besov 空间 $B_{1,1}^\alpha$ 里,求解模型式(21)的算法类似于式(11),这里仅给出不同之处的分析.由式(21),式(17)变为

$$g_\gamma^{(k+1)} = \operatorname{argmin}_{g_\gamma} \left\{ \sum_{\gamma \in \Gamma} 2^{j(\alpha-1)} |g_\gamma| + \frac{\mu}{2} \sum_{\gamma \in \Gamma} \|g_\gamma - (f^{(k+1)} - b^{(k)})_\gamma\|^2 \right\} \quad (22)$$

该泛函可以解耦为

$$g_\gamma^{(k+1)} = \operatorname{argmin}_{g_\gamma} 2^{j(\alpha-1)} |g_\gamma| + \frac{\mu}{2} \|g_\gamma - (f^{(k+1)} - b^{(k)})_\gamma\|^2, \forall \gamma \in \Gamma$$

上式的解为

$$g_\gamma^{(k+1)} = T_{2^{j(\alpha-1)}/\mu}((f^{(k+1)} - b^{(k)})_\gamma), \forall \gamma \in \Gamma \quad (23)$$

其中 T 为软阈值算子.因此式(11)与式(21)的求解算法仅是阈值算子的不同,当 $\alpha = 1$ 时,阈值算子与分解尺度无关,当 $\alpha \neq 1$ 时,阈值算子是尺度依赖的.

利用 Curvelets 分解空间 $G_{1,1}^{1/2}$ 和 Besov 空间 $B_{1,1}^1$ 的嵌入关系 $B_{1,1}^1 \subset G_{1,1}^{1/2}$ ^[19], 模型式(10)的另一个直接推广是用 $G_{1,1}^{1/2}$ 替代 $B_{1,1}^1$, 有下面推广的模型

$$\min_{f \in G_{1,1}^{1/2}(\Omega)} \left(|f|_{G_{1,1}^{1/2}} + \lambda \int_{\Omega} (f - f_0 \log f) dx \right) \quad (24)$$

这里 $|f|_{G_{1,1}^{1/2}}$ 是 f 在分解空间 $G_{1,1}^{1/2}$ 的半范.利用 Curvelets 系数和分解空间半范的等价模关系,式(24)等价于曲线波变分模型

$$\min_{f_\gamma} \left(\sum_{\gamma \in \Lambda} 2^{-j/4} |f_\gamma| + \lambda \int_{\Omega} (f - f_0 \log f) dx \right) \quad (25)$$

这里 f_γ 表示函数 f 的 Curvelets 系数, Λ 表示全体 Curvelets 系数指标集.由式(12)~(17)的分析,求解模型式(25)的算法类似于式(11).由式(25),式(17)式变为

$$g_\gamma^{(k+1)} = \operatorname{argmin}_{g_\gamma} \left\{ \sum_{\gamma \in \Lambda} 2^{-j/4} |g_\gamma| + \frac{\mu}{2} \sum_{\gamma \in \Lambda} \|g_\gamma - (f^{(k+1)} - b^{(k)})_\gamma\|^2 \right\} \quad (26)$$

该泛函可以解耦为

$$g_\gamma^{(k+1)} = \operatorname{argmin}_{g_\gamma} \left\{ 2^{-j/4} |g_\gamma| + \frac{\mu}{2} \|g_\gamma - (f^{(k+1)} - b^{(k)})_\gamma\|^2 \right\}, \forall \gamma \in \Lambda$$

上式的解为

$$(g_\gamma)^{(k+1)} = T_{2^{-j/4}/\mu}((f^{(k+1)} - b^{(k)})_\gamma), \forall \gamma \in \Lambda \quad (27)$$

其中 T 为软阈值算子.因此求解曲线波变分模型式(25)仍可以使用算法 1,不同之处是使用曲线波阈值式(27)替代小波阈值.进一步可以考虑更一般的 Curvelets 分解空间 $G_{1,1}^\alpha$.

4 数值实验

文献[14]基于全变差(TV)正则提出了一个去除乘性噪声的交替分裂迭代算法,并得到了 TV 类方法的最好结果.这一节的实验给出本文算法与文献[14]中算法的比较.本文算法中,小波选取为 DB3 小波,使用 3 层小波展开.

图 1 为原始的 Barbara 图像、人工合成图像和法国

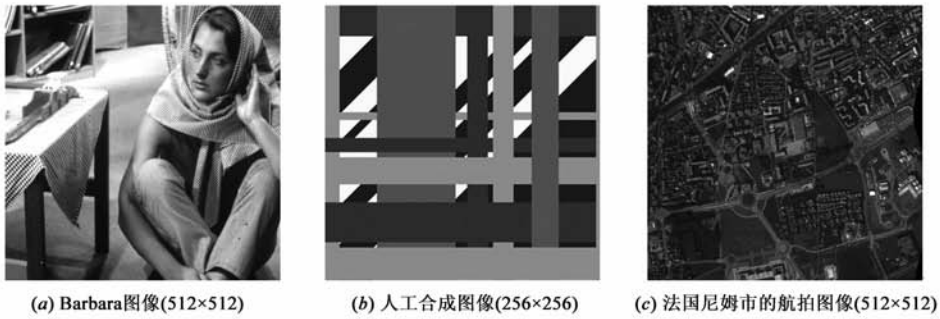


图1 测试图像

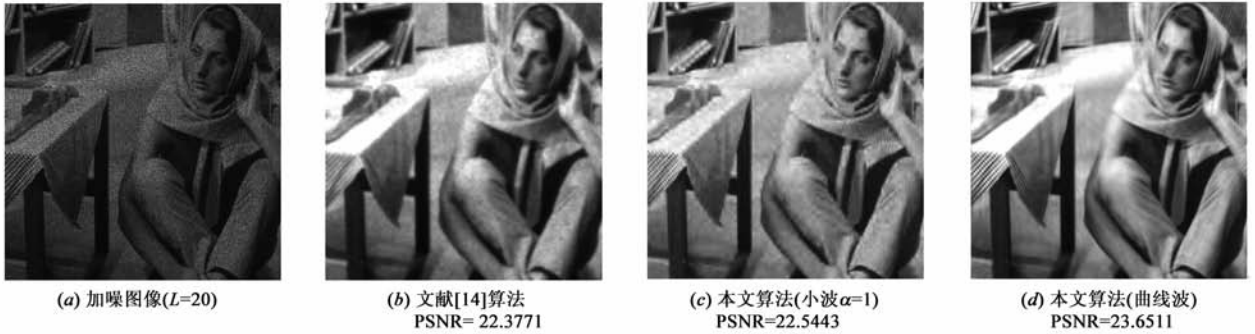


图2 Gamma乘性噪声污染的Barbara图像(512×512)的去噪实验

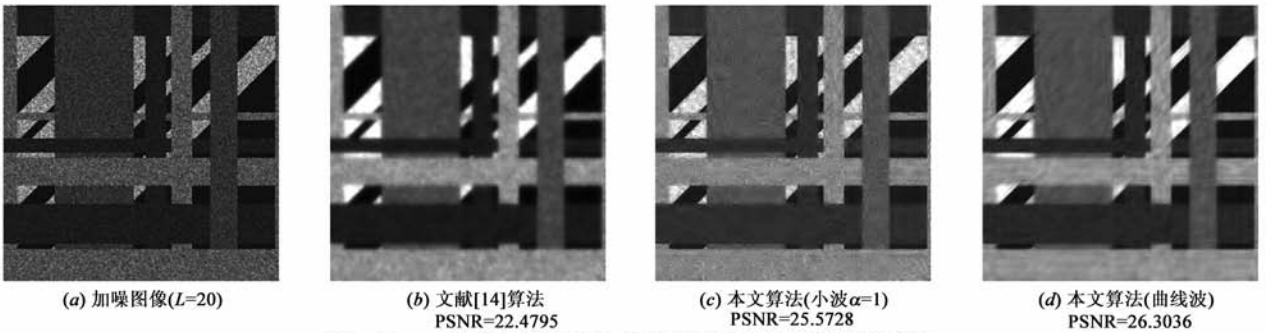


图3 Gamma乘性噪声污染的人工合成图像(256×256)的去噪实验

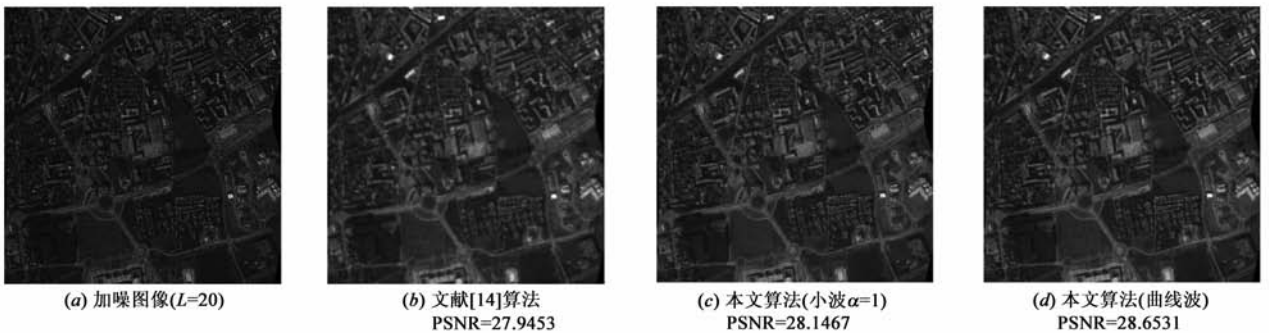


图4 Gamma乘性噪声污染的法国尼姆市航拍图像(512×512)的去噪实验

尼姆市的航拍图像. 图 2、图 3 和图 4 分别为使用本文算法与文献[14]中算法对三个测试图像的去噪实验结果比较. 噪声是均值为 1, $L=20$, 服从 Gamma 分布的乘性噪声. 由于二种算法使用不同的正则化方法, 实验在正则化参数区间[1, 15]进行循环测试, 最终给出其最优结果. 与文献[14]算法相比, 从图像的细节信息上看出,

本文算法较好的保持了图像的纹理和对对比度(图 2(b)的围巾和裤子较模糊, 图 3(b)出现明显的阶梯效应). 从图 2(c)、图 3(c)和图 4(c)与图 2(d)、图 3(d)和图 4(d)的对比可以看到, 在本文算法中, 使用曲线波阈值替代小波阈值, 图像质量有明显提高. 实验结果不论信噪比还是视觉效果, 本文的结果比文献[14]更优.

使用本文的小波方法,选取不同 Besov 光滑指标 α 对去噪结果有一定的影响.图 5 给出测试图像随光滑指标 α 变化的峰值信噪比变化曲线图. Barbara 图像和人工合成图像的正则化参数选取为 $\lambda = 1.5$, 航拍图像的正则化参数选取为 $\lambda = 6$. 从变化曲线可以观察到,三个测试图的最高峰值信噪比都是在接近 $\alpha = 1$ 时达到. 当 $0.7 \leq \alpha \leq 1$ 时,信噪比几乎相当,差异不超过 0.3dB. 当 $\alpha > 1$ 时,信噪比逐渐下降.

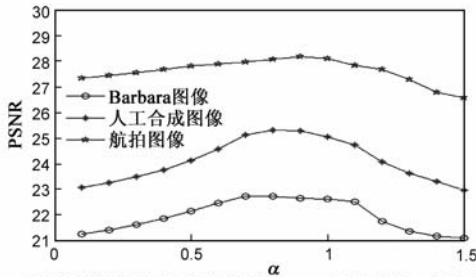
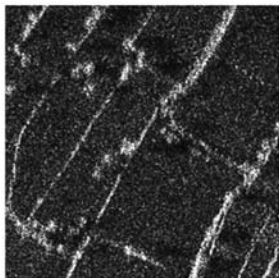


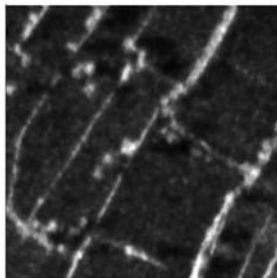
图5 测试图像的峰值信噪比随Besov光滑指标 α 变化曲线

表 1 测试图像的去噪实验比较

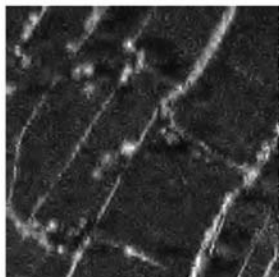
图像	噪声参数 L	加噪图	文献[14]算法	本文算法 (小波 $\alpha = 1$)	本文算法 (曲线波)
Barbara 图像	10	10.4494	21.8895	21.2245	22.3127
	20	11.7891	22.3771	22.5443	23.6511
	30	13.1514	23.1264	23.9478	24.0180
人工合成图像	10	12.6639	22.1269	23.8089	24.5695
	20	14.5177	22.4795	25.5728	26.3036
	30	15.5275	23.7011	26.3358	27.2177
航拍图像	10	18.2235	26.8223	25.0614	27.1643
	20	20.5559	27.9453	28.1467	28.6531
	30	21.4451	28.3668	29.3804	29.5818



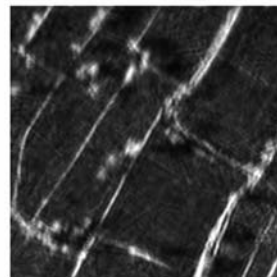
(a) 真实SAR图像



(b) 文献[14]算法



(c) 本文算法(小波 $\alpha=1$)



(d) 本文算法(曲线波)

图6 单视强度格式的真实SAR图像(256×256)的去噪实验

以峰值信噪比 (PSNR/dB) 为性能指标,表 1 列出使用二种算法对不同噪声强度、不同测试图像的去噪实

验数据.从实验数据可以清楚地看到,本文算法有更好的结果.

最后,使用二种算法对单视强度格式的真实 SAR 图像进行去噪实验.从图 6 看到,本文算法的视觉效果更好.

5 结论与展望

本文提出一个去除乘性噪声的小波变分模型,并给出求解算法.进一步,推广该模型和算法到更一般的 Besov 空间和曲线波分解空间.通过数值实验,验证了该算法的有效性.基于提出的模型,可以做大量的、更深入的研究.从式(10)模型很容易推广到平移不变小波、波原子等,这些推广是直接的.进一步我们将使用迭代正则化和逆尺度空间方法来提升去噪结果,并期望迭代收敛解能出现新的特性.

参考文献

- [1] Rudin L, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithm[J]. Physica D, 1992, 60(1-4): 259-268.
- [2] 李敏,冯象初.基于小波空间的图像分解变分模型[J].电子学报,2008,36(1):184-187.
Li Min, Feng Xiang Chu. A variational model for image decomposition based on wavelet method [J]. Acta Electronica Sinica, 2008, 36(1): 184-187. (in Chinese)
- [3] Lorenz D A. Variational Denoising in Besov Spaces and Interpolation of Hard and Soft Wavelet Shrinkage[D]. German: University of Bremen, 2005.
- [4] Chambolle A, DeVore R A, Lee N. Nonlinear wavelet image processing: variational problem, compression and noise removal through wavelet shrinkage [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1998, 7(3): 319-335.
- [5] Daubechies I, Teschke G. Variational image restoration by means of wavelets: simultaneous decomposition, deblurring, and denoising[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2005, 19(1): 1-16.
- [6] Xu J, Osher S. Iterative regularization and nonlinear inverse scale space applied to wavelet-based denoising [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2007, 16(2): 534-544.
- [7] Li M, Hao B B, Feng X C. Iterative regularization and nonlinear inverse scale space based on translation invariant wavelet shrinkage[J]. International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing, 2008, 6(1): 83-95.
- [8] Henderson F M, Lewis A J, et al. Principle and Applications of Imaging Radar[M]. New York: John Wiley and Sons, 1998. 330-334.
- [9] Rudin R I, Lions P L, Osher S. Multiplicative denoising and deblurring: theory and algorithms[A]. Geometric Level Set Meth-

- ods in Imaging, Vision, and Graphics[C]. New York: Springer, 2003. 103 – 119.
- [10] Aubert G, Aujol J F. A variational approach to remove multiplicative noise[J]. *SIAM Journal Applied Mathematics*, 2008, 68(4): 925 – 946.
- [11] Shi J, Osher S. A nonlinear inverse scale space method for a convex multiplicative noise model[J]. *SIAM Journal Imaging Sciences*, 2008, 1(3): 294 – 321.
- [12] Huang Y M, Ng M K, Wen Y W. A new total variation method for multiplicative noise removal[J]. *SIAM Journal Imaging Sciences*, 2009, 2(1): 22 – 40.
- [13] Durand S, Fadili J, Nikolova M. Multiplicative noise cleaning via a variational method involving curvelet coefficients[A]. *Scale Space and Variational Methods [C]*. Voss, Norway: Springer, 2009. 282 – 294.
- [14] José M, Mário A. Multiplicative noise removal using variable splitting and constrained optimization[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2010, 19(7): 1720 – 1730.
- [15] Shen J H. On the foundations of vision modeling I. Weber's law and Weberized TV restoration[J]. *Physica D*, 2003, 175: 241 – 251.
- [16] Goldstein T, Osher S. The split Bregman method for l1 regularized problems[J]. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2009, 2(2): 323 – 343.
- [17] Setzer S. Split Bregman algorithm, Douglas-Rachford splitting and frame shrinkage[A]. *SSVM'09 Proceedings of the Second International Conference on Scale Space and Variational Methods in Computer Vision [C]*. Berlin: Springer, 2009. 464 – 476.
- [18] 李亚峰, 冯象初. L1 投影问题的分裂 Bregman 方法[J]. *电子学报*, 2010, 38(11): 2471 – 2475.
Li Y F, Feng X C. The split Bregman method for L1 projection problems[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2010, 38(11): 2471 – 2475. (in Chinese)
- [19] Borup L, Nielsen M. Frame decomposition of decomposition spaces[J]. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 2007, 13(1): 39 – 70.

作者简介

李亚峰 男, 1977 年生, 讲师, 博士生, 研究方向为小波与偏微分方程在图像、信号处理中的应用研究。
E-mail: liyafeng770729@126.com

冯象初 男, 1962 年生, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为数值分析、小波理论及其应用和尺度空间理论及在图像处理中的应用。
E-mail: xcfeng@mail.xidian.edu.cn